Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ingeniería	2º Cuatrimestre 2017	
□ 75.12/95.04/95.13 Curso 05 - □ 95.10 Curso 02	Evaluación Parcial. Primera Oportunidad. Tema 2	Nota: 9 (Nuevo)
Padrón: 99325	Apellido y Nombres: DONZIS SEBASTIÁN	

Ejercicio 1. Con los siguientes datos se han realizado un Ajuste por Cuadrados Mínimos e Interpolaciones por Newton, Lagrange Baricéntrico y Spline; siempre eligiendo los puntos desde X0 en adelante, en orden de índice *i* creciente.

i	0	1	2	3	4	5	6
Xi	?	?	?	?	3.t	e^t	t^2
Yi	?	?	?	?	11	?	10
Y'i	?			?			

$$A1 = \begin{vmatrix} 6 & nd \\ 33{,}1825 & nd \end{vmatrix} \quad B1 = \begin{vmatrix} 39 \\ nd \end{vmatrix} \quad A2 = \begin{vmatrix} 4 & nd & 0 & 0 \\ nd & nd & nd & 0 \\ 0 & nd & 6 & nd \\ 0 & 0 & nd & nd \end{vmatrix} \quad B2 = \begin{vmatrix} 3 \\ nd \\ 3 \\ -9 \end{vmatrix}$$

$PN(x) = x + nd.x^2 + -0{,}1875\ .x^2.(x-x1) + nd.x^2.(x-x1)(x-x2)$

$1/W0 = -40{,}0$ con X0, X1, X2, X3

a g) Indicar para cada ajuste o interpolación los puntos usados, el grado y la cantidad de polinomios resultantes.

b h) Utilizando la expresión de PN(x) y sin realizar cálculos, obtener toda la información posible para i=0

c i) Incorporando Spline y Lagrange Baricéntrico, hallar la información para i=1, i=2 e i=3

d j) Incorporando la información de Cuadrados Mínimos, obtener Y5 y una ecuación del tipo f(t) = cte.

e k) Construir la gráfica de proceso de la función f(t) y obtener la expresión teórica de Cp y Te.

f l) Adoptando una perturbación absoluta de 0.1 estimar Cp para t=2.5 y comparar con el valor teórico.

Ejercicio 2. Se tiene el sistema A.X = B, la Factorización por Doolittle de A y algunos datos usados para el MGC:

$$A := \begin{bmatrix} A11 & A12 & A13 \\ A21 & x & 0 \\ A31 & 0 & x\cdot\cos(x) \end{bmatrix} \quad L := \begin{bmatrix} nd & 0 & 0 \\ 0{,}5 & nd & 0 \\ 0{,}25 & nd & nd \end{bmatrix} \quad U := \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 0 & nd & nd \\ 0 & 0 & nd \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \alpha := \frac{r0^T \cdot r0}{d0^T \cdot A \cdot d0}$$

a) A partir de la información de L y U, obtener la matriz A

b) Considerando el vector inicial X0 para el MGC, plantear una ENOL para el caso $\alpha(x) = 1/8$

c) Resolver la ENOL en [3.5 , 5.5] por un Método de convergencia cuadrática con una tolerancia de 10^{-5}

d) Para el valor de x hallado, reescriba la matriz A e indique si el MGC y el método de Jacobi convergerían para dicha matriz.

e) Estime el valor de Te por perturbaciones experimentales para $[f(x) = \alpha(x) - 1/8]$ en x=4.5

NOTA: Si no pudo hallar $\alpha(x)$ adopte $\alpha(x) = 2 / [x - 2.x.\cos(x) + 11]$

Ejercicio 3. Indicar a qué método corresponde el siguiente bloque de Python y detectar cuáles son los 3 errores que impedirían que el mismo llegue a un resultado correcto:

Newton-Rapson.

```
(1) iterar = False   true
    while(iterar==True):
        x1 = x2
(2)     x2 = x1 - self.ecuacion(x2)/self.derivada(x1)   x1
        iter += 1
(3)     if (np.abs(x2 + x1)/np.abs(x2)>tol):   -
            iterar = True
        else:
            iterar = False
```

Firma

Scanned by CamScanner

DONZIS SEBASTIÁN 99325 1/4

1)

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0	2	4	5	$3t$	e^t	t^2
y_i	0	4	6	8	11	10	10
y'_i	1	/	/	-1	/	/	/

→ Cuadrados mínimos — 1 pol, grado 1 (lineal), $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$

→ Lagrange baricéntrico — 1 pol, grado 3, x_0, x_1, x_2, x_3

→ Spline — 3 pol, grado 3, x_0, x_1, x_2, x_3
además $(f'(x_0), f'(x_3))$

→ Newton (Hermite) — 1 pol, grado 4, x_0, x_1, x_2, x_3, [illegible]
además $(f'(x_0))$

b) obtengo toda la información de $i=0$

$\boxed{y_0 = 0} = a_0 \to (PN)$

$\boxed{x_0 = 0} \to (x - x_0) = x$

$\boxed{f'(x_0) = 1} \to f_{00} = a_1 \, (PN) = 1.$

c) Datos de spline.

$4 = 2h_0 \Rightarrow 2 = x_1 - x_0 \to x_1 = 2 + x_0 = \boxed{2 = x_1}$

$\frac{1}{w_0} = -40 = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)$

$-40 = (-2)(-x_2)(-x_3)$

$6 = 2(h_1 + h_2) = 2.(x_2 - x_1 + x_3 - x_2) = 2.(x_3 - x_1)$

$\Rightarrow 3 = x_3 - 2 \to \boxed{x_3 = 5}$

$\Rightarrow -40 = +2 . x_2 (-5) \to \boxed{x_2 = 4}$

Scanned by CamScanner

A partir del vector B de Spline

$$3 = 3.(F_{10} - F_{00})$$

$$3 = 3.[F_{10} - f'(x_0)] \Rightarrow \boxed{F_{10} = 2} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$1 = F_{10} - 1$$

$$\therefore\ y_1 = F_{10}.(x_1 - x_0) + y_0$$

$$y_1 = 2.(2-0) + 0$$

$$\boxed{y_1 = 4}$$

(*)

Luego $3 = 3.(F_{32} - F_{21}) \Rightarrow 1 = F_{32} - 1$

$$\boxed{F_{32} = 2}$$

y, $-9 = 3.(f'(x_3) - F_{32}) \Rightarrow -3 = f'(x_3) - 2$

$$\boxed{f'(x_3) = -1}$$

$$\Rightarrow F_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - 4}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{y_2 = 6}$$

$$F_{23} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = 2 = \frac{y_3 - 6}{1} \Rightarrow \boxed{y_3 = 8}$$

PN $\Rightarrow$

- x_0 $y_0 = 0$
- x_0 y_0
- x_1 y_1
- x_2 y_2
- x_3 y_3

- $f'(x_0) = 1$, F_{01}, F_{12}, F_{23}
- F_{001}, F_{012}, F_{123}
- $F_{0012} = -0{,}1875$, F_{0123}
- F_{00123}

$$F_{001} = \frac{F_{10} - f'(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{2-1}{2} = 0{,}5$$

Luego $F_{0012} = \dfrac{F_{012} - F_{001}}{x_2 - x_0} = \dfrac{F_{012} - 0{,}5}{4}$ $\therefore \boxed{F_{012} = -0{,}25}$

$F_{012} = \dfrac{F_{12} - F_{01}}{x_2 - x_0} = \dfrac{F_{12} - 2}{4}$ $\therefore \boxed{F_{12} = 1}$ (*)

DONZIS, SEBASTIÁN , 99325 2/4

d) Del vector B de CH

$$39 = \sum y_i$$

$$=$$

$$39 = 0 + 4 + 6 + 8 + 11 + y_5$$

$$\Rightarrow y_5 = 10$$

Luego de la matriz A,

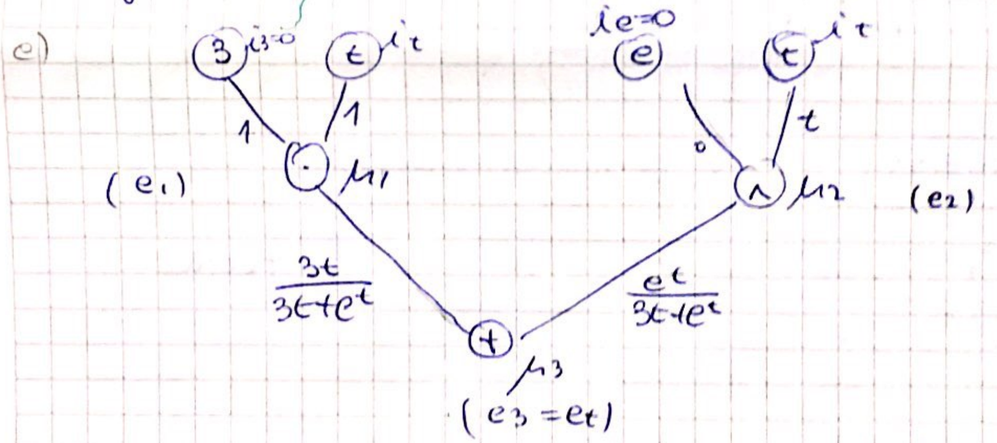
$$33{,}1875 = \sum x_i = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$33{,}1875 = 0 + 2 + 4 + 5 + 3t + e^t$$

$$\Rightarrow f(t) = 3t + e^t = 22{,}1875$$

$$f(t) = 3t + e^t$$

e)



ASUMIMOS QUE
$i_e = 0$
$i_3 = 0$

$$\Rightarrow e_1 = i_t + \mu_1$$

$$e_2 = t \cdot i_t + \mu_2$$

$$e_t = \frac{3t}{3t+e^t}(i_t + \mu_1) + \frac{e^t}{3t+e^t} \cdot (t\, i_t + \mu_2) + \mu_3$$

$$e_t = \frac{3t + te^t}{3t+e^t}\, i_t + \frac{3t+e^t}{3t+e^t}\, \mu \quad ; \mu_1, \mu_2, \mu_3 < \mu$$

$$\Rightarrow \boxed{e_T = \frac{t \cdot (e^t+3)}{3t+e^t}\, i_t + \mu}$$

NO SE PUEDE AGRUPAR ASÍ

$$\therefore \boxed{C_P = \frac{t.(e^t+3)}{3t+e^t}} \quad , \quad \boxed{t_P = 1}$$

y menos hacer... !

f) $\cancel{Cp \approx \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x) \cdot r}}$

$\tilde{x} = x \cdot (1 \pm r)$

$|\tilde{x} - x| = e_A$

$\frac{|\tilde{x} - x|}{x} = r \Rightarrow r = \frac{0,1}{2,5} \to 0,04$

$\therefore \quad Cp \approx \max \begin{Bmatrix} |Cp^+| \\ |Cp^-| \end{Bmatrix}$ donde $Cp^{\pm} = \frac{f(\tilde{x}^{\pm}) - f(x)}{f(x) \cdot r}$

$Cp^+ = \left| \frac{f[x \cdot (1+r)] - f(x)}{f(x) \cdot r} \right| = 2,0084347.$

$Cp^- = \left| \frac{f(x \cdot (1-r)) - f(x)}{f(x) \cdot r} \right| = -1,853573$

$\boxed{Cp \approx 2,00844}$ por perturbación experimental.

$Cp = \frac{(e^{2,5} + 3) \cdot 2,5}{e^{2,5} + 3 \cdot 2,5} = \boxed{1,928426 = Cp}$ teórico.

$e_r(Cp) = \frac{\tilde{Cp} - Cp}{Cp} = 0,04149 \approx 4,15\ \%$ buena aproximación.

2) $Ax = B$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & x & 0 \\ a_{31} & 0 & x.\cos x \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ 0,25 & ? & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 4 & x & 0 \\ 2 & 0 & x.\cos x \end{bmatrix}$$

a) $A = L.U \Rightarrow$ fila A_1 = fila U_1

$$a_{21} = (0,5 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$$

$$a_{31} = (0,25 \quad ? \quad 1)\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

tambien se podría haber pensado que $L_{21} = m_{21}$

$$\Rightarrow 0,5 = \frac{a_{21}}{a_{11}} \rightarrow a_{21} = 0,5 . a_{11} = 0,5.8 = 4$$

$$y \quad L_{31} = m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} \rightarrow a_{31} = 0,25 . a_{11} = 0,25.8 = 2.$$

b) $$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} R^0 = B - A\,x^{(0)} = B \\ d^0 = R^0 = B. \end{array}$$

$$\Rightarrow \alpha(x) = \frac{\|B\|^2}{(B, AB)}$$

$$d(B, A\cdot B) = (1\ 1\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 4+x \\ x.\cos x + 2 \end{pmatrix}$$

CA $\quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 14 \\ 4+x \\ 2+x\cos x \end{pmatrix}$ $\quad \Rightarrow d(B, AB) = 14 + 4 + x + x\cos x + 2$

$$\Rightarrow \alpha(x) = \frac{3}{x.(1+\cos x)+20}$$

$$\alpha(x) = \frac{1}{8} \Rightarrow x.(1+\cos x) + 20 = 24$$

ENOL $\rightarrow$ $x.(1+\cos x) - 4 = 0$

c) Resolver por un método de convergencia cuadrática.

$\Rightarrow$ Newton - Raphson.

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - \frac{f(x^{(i)})}{f'(x^{(i)})}, \quad f(x) = x.(1+\cos x) - 4$$

$$f'(x) = 1 + \cos x + x.(-\operatorname{sen} x)$$

$$\Rightarrow x^{(0)} = 4 \rightarrow x^{(1)} = 4 - \frac{4.(1-\cos 4) - 4}{1+\cos 4 - 4.\operatorname{sen} 4} = 4,77501495$$

$x^{(1)} = 4,77501495$ $\quad er_1 = 0,162307$

$x^{(2)} = 4,59076402$ $\quad er_2 = 0,0401358$

$x^{(3)} = 4,58454786$ $\quad er_3 = 0,00135589$

$x^{(4)} = 4,58453877$ $\quad er_4 = 0,00000198352 < tol.$

$$\Rightarrow \boxed{x_s = 4,58453877}$$, y el error relativo de la última iteración fue $1,9835.10^{-6}$.

$$\left[x^{(i+1)} = x^{(i)} - \frac{x^{(i)}.(1+\cos(x^{(i)})) - 4}{1+\cos x^{(i)} + x^{(i)}.(-\operatorname{sen} x^{(i)})} \right]$$

Scanned by CamScanner

d)

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 4 & 4{,}585 & 0 \\ 2 & 0 & -0{,}5845 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = -30{,}43 < 0 \Rightarrow$ NO es definida positiva

Por lo tanto:

Método Gradientes conjugados : condiciones: $\to A^t = A$ ✓

$\to$ Def. positiva X

$\Rightarrow$ No convergerá.

Método Jacobi : condición: Diagonal Dominante. X

$\Rightarrow$ No convergerá. (fila 3 $\to |a_{31}| > |a_{33}|$)

e) $te \approx \left| \dfrac{f(x^*) - f(\tilde{x})}{f(x)^*} \right| \cdot \dfrac{1}{\xi - \mu}$, $f(x) = d(x) - 1/8$

$f(x) = \dfrac{3}{x + x\cos x + 20} - \dfrac{1}{8}$

(*) $\mu = 0{,}5 \cdot 10^{-7}$

(~) $\xi = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$

$f(4{,}5)^* = \dfrac{3}{4{,}5 + 4{,}5 \cdot \cos 4{,}5 + 20} - \dfrac{1}{8} = 0{,}0023808603$

$f(4{,}\tilde{5}) = \dfrac{3}{4{,}5 + 4{,}5 \cdot \cos 4{,}5 + 20} - \dfrac{1}{8} = 0{,}00238086$

$\Rightarrow te \approx \dfrac{0{,}0023808603 - 0{,}00238086}{0{,}0023808603} \cdot \dfrac{1}{0{,}5(10^{-5} - 10^{-7})}$

$$\boxed{te \approx 0{,}0254553}$$

MAL PLANTEADO MAL EJECUTADO

y las operaciones intermedias?

3) (1) iterar = true

(2) x2 = x1 - self.ecuacion(x1) / self.derivada(x1)

(3) if (np.abs(x2-x1) / np.abs(x2) >tol) :